



TITLE:

現代確率論の起源,形成および発展
(I) : 特に確率過程論におけるこれらの
歴史的背景とイノベーション理
論 (数学史の研究)

AUTHOR(S):

阿部, 剛久

CITATION:

阿部, 剛久. 現代確率論の起源,形成および発展(I) : 特に確率過程論におけるこれらの歴史的
背景とイノベーション理論 (数学史の研究). 数理解析研究所講究録 2012, 1787: 304-315

ISSUE DATE:

2012-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/172761>

RIGHT:

現代確率論の起源, 形成および発展 (I)

— 特に確率過程論におけるこれらの歴史的背景とイノベーション理論 —

芝浦工業大学 阿部剛久 (Takehisa Abe)

Shibaura Institute of Technology

まえおき かつて飛田武幸先生が Paul Pierre Lévy (1886–1971) に関するセミナー ([6]) において, その専門的事項の「結論的注意」とされて, つぎの事柄を問題として提起されている。

自問自答したいこと: 現代確率論の起源と歴史は? 確率論が数学の中で, あるいは科学の中で占める位置は?—Part I, p. 11—

本論の主題 このセミナーの少なくとも最初の問題に関して, 多彩な議論とともにほとんど確信的な回答 (もちろんその正しさは検証に値するが困難な事ではないであろう) を自発的に可能にする貴重な情報が含まれていて, 確率論のみならず, 史論にも関心を寄せる研究者にとって貴重な情報源となり得ている。二番目の問題は簡単ではないであろう。もちろん確率論の重要性はわかっているが, 体系的な考察のためには他分野との比較的検証, 歴史を見る長い目とグローバルな視野が必要であろう。非決定論的意味では, 方法的にも他分野の追従を許さぬ唯一絶対的な立場を堅持していることは大きな強みである ([1] 参照)。だが後者の問題は他に置いて, 今は前者のそれを本論のテーマの一つとして, これを明らかにすること, および現代確率論の (創始者による確率過程論の現代的展開) の基礎に位置して創造的活動への段階的指導原理: イノベーション理論の紹介とその偉大な貢献 (飛田の理論) に言及することを目的とする。

近代確率論の発祥とその後の展開 さて, 多くの人々が知り得ていることであろうが, 確率論の近代史の概観にざっと触れておく。確率論はその古い時代の歴史的起りはさておいて, 19世紀後半から末近く, 1. 解析学的发展 (実変数関数, フーリエ解析, リーマン積分) に伴い, 次第に一個の学術的分野の形成に至った。20世紀に入ってから, 2. 解析学の成果 (積分論, 測度論) を確率論の手法に採り入れて, この分野は飛躍的な進歩を遂げ, 3. 理論の近代化 (公理的構成) に基づいて確率の基礎に関する一連の成果の導出, 応用を含む主題域の拡大等, 理論の近代的体系化を果たした ([19])。ここまでに寄与した主要な数学者たち: 1 では, H. Hankel, P. G. L. Dirichlet, G. F. B. Riemann たち; 2 では, H. L. Lebesgue, および前後の著名な数学者たち; 3 では, A. N. Kolmogorov, 伊藤 清たちであったことは, だれもがよく知るところであろう。それ以後から今日まで, 確率論は現代解析学とともに分科は多岐にわたり, 基礎および応用ともに更なる創造的発展の途上にある。この最後の行に示唆される分科も含めて確率論の内容自体の全体的構成を概観することによって, 今後にかけて述べられる主題の位置する場を確認しておきたい。

確率論の構成内容と現代論の主対象分野: 確率過程論 今日まで国内・外を問わず確率論に関する著書は無数に近いほど多数であろうが, ここでの主要な参考文献の一つとして, [7] (飛田武幸「確率論の基礎と発展」, 2011 年 4 月, 共立出版) が度々用いられるであろう。本著は理論の基礎とその発展全般に関わる専門書であるばかりでなく, 入門者のための優れたテキスト・参考書としても十分に役立ち得よう。応用を主とする本著の続編が出版されることを期待したい。他に先生の近著の洋書二冊が後に紹介されよう。他に初等的入門書として, たとえば [20], 太平洋戦争末期までのこの分野の水準を示す [15], 戦後から今日までの専門書としての成果の集大成 [16] 等がここでは参考される。

確率論の研究分野を大別すれば, 1. 基礎概念 2. 確率過程論 3. 応用 4. 他 とできようか。どの分野、テーマも一個の学術体系下にある限り、完全に他と無関係ではあり得ないから、これらのある

分野等に属するとされる小項目等が時には異なる分野や異なるテーマに属するとしても全くおかしいこととはあるまい。ここでは、確率論にあまり慣れ親しんでいない人々のために、上記の標準的な分類の下で現代論の主要対象分野である確率過程論の中の講演テーマに関する主要事項に触れておきたい。

1. **基礎概念** 確率とは、偶然または非決定論的現象(または事象)の起る可能性(の程度)を示す数学的概念である。この確率(P で示す)の確率測度としての数学的記述(P が満たす3条件から成る公理:Kolmogorovの公理 [19])を基本に測度空間の一種である確率空間が決定される。この空間とは、 Ω :集合(\neq 空集合), \mathcal{B} :与えられたKolmogorovの公理を満たす Ω の部分集合の族(完全加法族または σ 加法族), P の三つ組: (Ω, \mathcal{B}, P) を指し、 \mathcal{B} の要素が事象に当る。確率空間を議論の起点として、様々な確率に関する結果が導出される(その基本的手法として集合の演算法則は有効である)、また変数は、確率空間の Ω 上で定義された実数値をとる \mathcal{B} 可測関数 $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ であって(ω :標本点), $B_\alpha = \{\omega: X(\omega) \leq \alpha\} (\alpha: \forall \text{実数})$

$\in \mathcal{B}$ から確率 $P(B_\alpha)$ が定まる。すなわち確率変数とは端的に云えば、事象を $X(\omega)$ によって実数値で表したもので、事象の起る確率はその実数値の実現値で与えられると云える。ここまでの確率論の最も基本的な概念の第一歩に当る。つぎに重要なことは、確率変数の分布、すなわち個々の事象の起る確率の分布(または確率法則)である。この分布を特徴づけるものが X の分布関数で、その性質によって三種の分布関数に一意的に分解されるが、特に絶対連続なものは、可測関数 $f(x)$ の区間 $(-\infty, x]$ での積分で与えられる。

このときの関数 $f(x)$ をその分布の密度関数とよぶ。密度関数によって表せる分布は数多く、最も著名なものの一つである標準正規(または Gauss)分布をはじめとする連続型のもの、およびそうでないもの(離散型)まで理論と応用における用途は広大である。以上は確率変数が1次元の場合であったが、多次元の場合へ一般化することも容易である。つぎに応用上避けては通れない確率的諸量を定める必要がある。これらは、平均値(または期待値)、分散や標準偏差、その他(多次元の場合の共分散、相関係数等)が考えられ、たとえば最も卑近な応用例の一つ、数理統計学で重用されている(たとえば、[21])。ここでは詳述の余地はないが、条件付き確率と事象の独立性も知っておくとよい。これに関連した重要な一結果(T. Bayesの定理)は、原因事象 A_i の事前確率を知って逆に結果事象 B が起って後に A_i の起こる確率を求めるもので、最近その異分野への応用で話題となったと聞く。他にも触れるべき用語や概念(分布に関する性質を、S. Bochnerの定理に基づいてLévyの導入した分布に共通して定義できる特性関数の言葉による表現、近年ではつぎの極限定理に含まれて議論されることが多いP. L. Chebychevの不等式とその応用等)があるが、基礎概念の最後に、極限定理の一端に触れておきたい。

確率論固有の理論の中で、深い内容をもつ、特色のある理論の一つに極限定理がある。この極限定理は確率論の華であったし、現在においても、その確固たる地位は少しも揺らぐことはない。— [7], 第3章, p. 63—

近年から今日にかけて、極限定理に関わる事項は基礎の中でも近代的記述のおかげでその重要さとともに新しさも加わってより一層の体系化を遂げてきた印象が強い。そこでの内容は各定理が要求する確率空間上で議論され、事象列の極限(0-1法則)、大数の法則(強および弱法則、少確率の法則)、確率変数列とその和の収束、確率分布の極限と角谷の定理、中心極限定理(確率分布の極限、関連定理)、安定定理の吸引域等である(詳しくは[7]を参照)。従来はいくつかの法則や定理などは上記のような構成的形式内で見かけるよりは、むしろ異なる関係事項に近く配置されていた思いがする。その意味でも上記の構成手法は見通しのよいものとなったと云えよう。この節の最後として極限定理の中で古くからよく知られた基本的結果: Chebychevの不等式、大数の法則、中心極限定理の三者の関係や意義等を簡潔に概観することによって、改めて極限定理への入門をはじめ、統計学への理論的基礎を即提供するものとして理解し得よう。

与えられた標準偏差でデータのバラツキの程度を評価する Chebychev の定理 (ここでの不等式を確率で表示したものが、いわゆるよび名の不等式)、Chebychev の不等式を用いて大数の法則を証明(弱大数の法則、この系としての強大数の法則)、特に標本調査での全データ数が大きいとき、相対度数で示される統計的確率は数学的確率にほぼ等しいことの確実性は2項分布の平均値と分散を Chebychev の不等式に適用して得られる。この結果は数学的確率と統計的確率の関係を示すものである。また中心極限定理:

$X_i (i=1,2,\dots)$ を同じ分布をもつ互いに独立な確率変数, m を X_i の平均値, σ を X_i の標準偏差

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} P\left\{\left(\sum_{i=1}^k X_i - km\right)/\sqrt{k}\sigma \leq x\right\} = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx : \text{平均値が0, 分散が1の正規分布(標準正}$$

規分布)。このとき、この結果を用いて大数の法則 (弱または強の場合) を説明することも容易にできる。極限定理の面でも W. Feller の貢献と同様に Lévy の初期の仕事や Kolmogorov の結果はもっと強調されさるべきである、と云われる ([7])。

2. 確率過程論 確率過程とは、時間の推移とともに変化する確率事象の数学モデルであり、時間 t をパラメータとする確率変数の集合 $\{X(t, \omega); t \in T: t \text{ の範囲}, \omega \in \Omega: \text{全事象}\}$ (T の値のとり方によって離散時間または連続時間の確率過程とよび、これらは多次元過程(または確率場)へ一般化できる)。これは確率変数の系 $\{X(t)\}$ で与えられ誤解のないかぎり、単に $X(t)$ と書かれる。つぎに述べることは、本来であれば確率過程の分類に関する事柄が順序の上で正しいかもしれないが、ここでは主に特定の確率過程のみに関わることと、冒頭で述べた本論の主題または目標に直結する事柄を最優先する立場から、全体的な分類の話はほとんど省略して差し支えないであろう。特定の確率過程とは、中でも際立って重要なもの、ブラウン(R. Brown)運動 (とそれについて重要なポアソン(S. D. Poisson)過程) を指す。ブラウン運動については碩学のつぎの言葉を引用しておこう。:

ブラウン運動は広く自然科学のみならず社会科学の諸分野においても大きな存在感を示すものであり、数学が独占すべき内容ではない。しかし、自然科学としてのその理論構成には数学、特に確率論が中心的な役割を果たすべきであろう。

— [7], 第5章, p. 91—

確率過程の直観的定義によれば、確率現象の言葉をたとえば、‘溶液中の(植物学者ブラウンによるものは、水中の花粉の)微粒子の不規則な運動’でおき換えればこの現象はブラウン運動となる。その数学的記述は、一つの粒子の運動を考えれば、その運動は1次元実直線 \mathbf{R} 上に射影して、時刻0, t での位置をそれぞれ原点, $B(t)$ とするとき、粒子の位置関数 $B(t)$ は $B(t) = X$: 確率変数, 粒子の全体を全事象, 確率を粒子

の密度で決めることによって、時刻 t をパラメータとする確率変数の系 $\{B(t), t \geq 0\}$ を得る。ブラウン運動の数学的モデルの出発点となる定式化である。ポアソン過程の場合も同様にして $P(t)$ で表すとする。

(1) **ブラウン運動とポアソン過程** 確率過程はいくつかの基準に基づいて分類される。確率変数相互の従属関係のあり方によるもの: マルコフ, 加法, 定常, マルチンゲール等の諸過程。確率過程の分布によるもの: ガウス, ポアソン, 安定等の諸過程。見本関数によるもの: 連続, 点, 超等の諸過程がある。先に述べたようにブラウン運動とポアソン過程の属する系列についてのみ触れておきたい。両者が同時に含まれる場合の分類にしたがう同一過程は加法過程であるが、それぞれの分類基準を異なるものとして属する確率過程は二組あって、そのうちの二組、ブラウン運動がガウス過程, ポアソン過程が加法過程にしたがう場合が後述の都合から重要となる (他のもう二組はブラウン運動が加法過程, ポアソン過程は自身のなす過程を代表とする場合である)。それぞれが前者の過程に支配される場合の性質を少しばかり詳しく見る。

1) ブラウン運動 ブラウン運動 $B(t)$ ($t \geq 0$) はつぎの性質を満たす確率過程である.

1°. 任意の1次結合 $\sum a_i X(t_i)$ はガウス分布にしたがう. 2°. $B(0) = 0$. 3°. 各変数 $B(t)$ の平均値 $= 0$, 共分散関数 $\Gamma(t, s) = \min(t, s)$. つぎの主題とする確率変数(の系)(したがってその過程)にとって最も基本的かつ重要な概念(キーワード)の一つである, 「独立」であることの主張は, ブラウン運動の場合, 任意の $t, h > 0$ に対して, 増分 $\Delta B(t) = B(t+h) - B(t)$ の定める事象は, $B(u)$, $u \leq t$ の定める任意の事象と独立になるということである. もう一つの重要な概念としてのキーワードが「ガウス系」であり, その分布, 過程, ブラウン運動とその汎関数等を含む. 殊に最後の項目は確率解析のここでの主要テーマに深く関係してくる.

2) ポアソン過程 加法過程としてのポアソン過程はつぎの条件を満たす.

1°. $P(0) = 0$. 2°. $\Delta P(t) = P(t+h) - P(t)$, $t, h > 0$: 独立増分, すなわち t に関係ないから,

$\Delta P(t) = k$ (非負整数 $0, 1, 2, \dots$) によって, $P(k) = [(\lambda h)^k / k!] e^{-\lambda h}$ (点過程とよばれる). ポアソン過程もブラウン運動と同様に興味深いものがあるが, その特性については, [21] の他に [2] (p. 19, p. 21) も参考となろう. 両者のここでの主題に関する事項は [7] の他に, 最近出版された飛田先生の高度に専門的な2冊の洋書を後の本論で紹介したい.

(2) 確率変数の独立性とイノベーション理論(Lévy-飛田の仕事) 数多い確率過程をいくつかの基準の下で分類し, 分類されたもののそれぞれに応じた方法によって研究成果を得てきた従来の進め方をはじめ, 分類されたいくつかのものを合わせて統一的に研究しようとする等, 種々考えられようがいずれも容易で有効であるとは云えないであろう. しかしながら, 幸運なことにこの研究には一つの流れがあるという事実を飛田先生は指摘されてきた. その流れとは, 先に強調した「独立」の概念を指導原理の原点とするものである. 簡潔に述べれば, 時間的に発展中のランダムな複雑系があるとき, 'i. その系から素な(独立な確率変数の系で, それがもつ情報を増やすことなく変数の細分化が不可能である)ものを取り出して, ii. 問題の複雑系を素な要素の関数として表し, iii. その関数の解析を行なうという思想における i と ii を結ぶ流れを指す' .. この思想に要請されるものは因果性であり, 具体的には, これまでの多くの確率過程を上記 i から iii までの観点から時系列と連続パラメータの場合に分けてそれぞれの適合性が評価され, ブラウン運動やポアソン過程に代表されるガウス系や加法過程等は最適な過程としてあるが, 他の過程の評価は複雑であることが指摘される. なお, 上記の第1段階 i は **reduction**, 第2段階 ii は **synthesis**, 第3段階 iii は **analysis** とそれぞれよばれ, 全体的呼称が **innovation** である. これらの呼称は飛田先生によるもので, 特に全ステップを通して **innovation** は「**新生過程**」と命名され, 妥当なよび名と考える. 今日では, **innovation** は単なる思想ではなく, すべての過程に対して実現が容易とはいえないが, 確率過程論とその多方面にわたる応用のための創造的な実践的方法論となってきた. 詳細は後に議論される. なお任意の時刻を固定して初期時刻からその間に得た元の確率変数系の情報と新しく構成した独立確率変数系, すなわちイノベーション(標準表現とも云う)の含む情報は同一であることを注意しておく.

3. 確率解析への序章と発展 歴史的には, ベルヌーイ(J. Bernoulli)のArs Conjectandi(1713)にこの方面に関する問題提起がなされている意味で最初のもののものであると見なされている. 近代的には, ブラウンの論文 [1] (1828) が確率過程(後にブラウン運動と称された)を扱った最初のものであり, アインシュタイン(A. Einstein)の論文 [5] (1905)によって懸濁溶液中の微粒子の運動は物理学的に確率論的事象であることが明らかにされて以来, ペラン(J. Perrin)の仕事(1908)はブラウン運動を数学の見地から基礎付けるとともに, ウィーナー(N. Wiener)の測度論的な確率(ウィーナー測度)の構成に大きな影響を与えた. 現代では, ウィーナーの仕事は確率解析の歴史の始まりとも云われている. これについては後に触れるであろうが, 次回講演(II)の主テーマは高度に発展した確率解析としてのホワイトノイズ解

析(飛田の仕事)である。

「まえおき」で述べた事項1-3のそれぞれは、いずれも、近代以降の確率論の必要最小限の基礎的事項のまとめであり、確率過程論の基礎と応用において最も重要な数学的モデルとなるブラウン運動とそれに準じたポアソン過程およびこれらの過程に対するイノベーション理論の概要、最後に確率解析の粗略な歴史概観とイノベーション理論が提起する確率解析の究極的な主要問題(次回予定)に関わるものであった。

不完全ながらも「まえおき」をつぎに述べる本論の理解のための案内として、このIの主題：現代の確率過程論の起源、形成および発展の歴史的背景と、それに基づく飛田の仕事に対する重要な結論を得てから、「まえおき」の事項2の続きとしてのイノベーション理論のやや詳細な数学的議論を行なう。

本 論 (I) の主題：

1. 現代の確率過程論の起源、形成 および発展に関する準備的考察

この章の内容は次章に直結する重要事項を含むものであつて、最終的に非専門家としての筆者の目から見ても、現代確率論の名に相応し得ると思われる代表の選考を行なう。

(1) ‘現代’の言葉の解釈と確率過程論の主題をめぐって ‘…’内の言葉の用いられ方については、二通りの説明が可能であろう。一つは、実時間的に現代以前に始まったと認識され、今日におよんでいるもの(ここでは確率過程論)に対して用いられる場合、他は現代またはそれに十分近い時点に始まったものに対して用いられる場合である。後者の場合は現時点に至る時間の経過は比較的短い、その過程論の意義や必要性が特に重大視される場合のものを対象とする。

いずれにせよ、それぞれの場合において対象とされる確率過程論の起源と現状に至るまでの主題の発展、およびその開拓者たちの特定化をざっと検証してみたい。その結果、本質的に最も新しい段階にあるか、または顕著な成果を得てなお究明が継続されその価値を持続するものに対してこれを現代のほぼ代表的な確率過程論と見なすことによって、事実上の起源から始まって今日現在に至るその理論の評価を得たと云い得よう。その後、結論的に云えることは、代表的な過程論は必ずしも一つとは限らないであろうし、また、話題性の高さが与える理論や研究の影響力の強弱は一概に云えるものではないであろう。

最後に純粋数学としての代表的な確率過程論の決定基準または拠りどころがあるとすれば何か。それは上にも触れたように結論としての評価の優劣に関わることや他の主題への影響力に関わることも等々大事な要素であるが、与えられた時間的に発展するランダムな複雑系をより基礎的な系に還元することから始めて、その系の構造を解析的に明らかにすることを目的とする(イノベーションを思い出すとよい(まえおきの事項2(2)))確率(過程)論を、数学の一分野として確立しようとする高い普遍性をもった「確率解析」の方法である。数学的手段を最優先視することからの発想に基づく

以下の記述に対して、最新の研究成果をまとめた飛田・Si Si [8] および [9] は全般的な情報を提供する有益な参考文献である。

(2) 現代の主要な確率過程論と確率解析 今日までに考察されてきた確率解析を伴った確率過程論の主要例の数は、基礎的理論に限っても10件前後存在すると思われる。ここではそのうちの代表例と考えられる話題のいくつかを、先の現代の解釈にしたがう二通りの意味で述べよう。ほぼ全般的な詳細は池田 [18] とそこに記載の文献を参照するとよい。他に最近のものとして [27], [28] 等もある。

「まえおき」の事項3で触れたように、確率過程の近代理論の起源は1828年のBrownの仕事 [3] に始まり、1905年のEinsteinによる物理学的研究 [5] を経て、1908年のPerrinの数学的貢献 [26]

(1913) に帰着されてから今日まで、ブラウン運動をモデルとするガウス系の確率過程から様々な複雑な系にいたるまでの確率解析的な研究が進められている。これら三者の一連の研究を大局的に見るならば、確率過程がブラウン運動であっただけにこの運動はこの方面の現代的研究の起源と云っても奇異ではないであろう。しかしながら、発展の大きな流れの展望よりも種々の局面を伴い、ダイナミカルに変化変容しながら発展する理論や応用に目を向ける方がその重要性をよく認識する上で有効なあり方と信じる。

よって、確率過程論への先の三者の寄与はそれぞれ重要なものであるが、確率過程の近・現代的な解析

的研究による成果以前のもの、云わば予備的考察として、われわれの目標対象からは除外しておくことにする。したがってそれ以後の確率過程の研究に目を向けなければならない。いくつかの代表的な仕事で今日も継続されているものを選択するが、個人的な好みに偏重しないことが肝要であろう。記述は簡潔にかつ年代順に行なっておく。また非専門家の筆者にとって代表例のすべてを説明できる力と紙面の余裕はないから説明は寄与の著しく知られた数件の主題にとどめて、そのうちの主題3°は簡略に記載するだけとする。ただし、主題4°は、近年で最も新しく、まだ一般に定着し得ない確率過程論の狭義の意味の現代論にふさわしいゆえに1°—3°の各主題と区別してこれを特記する。

1°. N. Wienerの仕事[29]: Wiener 測度(連続関数空間上の確率)の構成(1923)は、その後のブラウン運動に関する基礎((例)多重 Wiener 積分の概念の導入[28])と応用((例)Feynman-Kacの公式[22])に大きな影響を与え続け、今日もお未解決問題を投じている確率解析の歴史上最初のものである。また Wiener 測度の導入後にブラウン運動の複雑な軌跡に対する Perrin の主張: どの点においても接線をもたず、微分不能な関数であること、の数学的確認を初めて行なったこと等、当時画期的な仕事に満ちていた。

2°. 伊藤 清の仕事[17]: 確率微分方程式(拡散型偏微分方程式)(1942)の確率解析への初めての応用として多様体上の Wiener 測度の確率を求めることに成功。これを導く過程において、微分方程式を積分方程式に直して通常右辺に現れる確率変数を含む積分の極限操作以前の定義式(Riemann 和)への帰結に基づく。当初の積分表示式の一般形(伊藤の公式)の特別な場合であり、計算途上の積分(呼称: ブラウン運動に関する確率積分または伊藤積分)は、現在の確率積分の基礎理論の大半を含む。この主題の基礎的な問題への広がりや影響もさることながら、応用分野も華々しく一層拡大されつつある。

3°. 飛田武幸の仕事[10],[11]: イノベーション理論(1960年)とホワイトノイズ解析(1993)では、Lévy にその重要さを示唆された飛田はその意義の詳細な分析に基づいて、本理論を確立し、その第3段階に位置する analysis に始まる無限次元確率解析、特にホワイトノイズを超汎関数とするブラウン運動の確率解析の画期的な展開を創始する。この方法の有効性は将来的に普遍的であると見られる。

4°. その他の重要な仕事: i. 経路積分と積分公式: 前者は R. Feynman(1942)、後者は J. H. Van Bleek(1928)による。後者は量子力学の伝播関数を汎関数の経路空間全体にわたる一種の積分として古典力学的表示を得て、後の Feynman の経路積分の古典力学の基本量を含む一般形式であること、および Wiener 積分の具体例として現在も研究が継続されている。過程論的には、ガウス系の単純マルコフ過程に関する無限次元確率解析である。ii. マルチンゲールと確率積分の一般化: Lévy 等を先駆者として、J. L. Doob によって確率過程マルチンゲール([4])の体系的研究に成功(1952)、この過程の特性をもつ伊藤積分の概念の拡張に貢献。彼以外に寄与した日本人研究者は数多く、渡辺信三ほかの尽力により概念の基礎構築を達成した。また飛田武幸はこの過程のより基本的過程による表現問題を研究、この本論 I の主題(イノベーション)に深く関連している。基礎と応用(特に経済学分野)で重要な役割りを果しているのも、この緩やかな確率過程の構造的広さによるものであろう。iii. 拡散方程式に対する確率解析的方法の開発: P. Malliavin による拡散過程における拡散方程式の解の滑らかさ、その他の幾何学的問題も含む従来の議論(伊藤の方法)を経ることなく、現在「マリアバン」解析とよばれる新しい確率解析的手法を築く(1976)。関数解析(シュワルツ超関数と関連した空間)をもその枠内に採り入れて体系化を目指しているであろうが、現在もなおその枠内にあって未解決な問題もあり、一般的体系の確立が将来にまたれる。他、確率過程にとって確率解析の重要な転機となった概念や方法は他にもいくつか挙げできようが、簡潔な説明の困難等もあってこれらを省略する(詳細は[18]とそこに記載された文献を参照)。

結 論: 現代確率論の代表的主題の決定

以上の1°から4°までに挙げられた主題のほとんどが提起されて以来、今日まで自らの発展と他への影響を与え続けてその数学的な普遍的価値を提示してきた。その意味でも確率論の現代的主題として十分な資格があると認められよう。特に、その中でも主題1°—3°は確率解析において殊更にその基本的特性が極めて顕著なだけに、その含む課題は基礎と応用の両面にわたって今後も種々の問題を提起し続けるであろうと期待される現代論の有力候補足り得ていよう。よってこれら三者の中から現代を代表する主題を

唯一選出することを試みるならば、時代が現代であるという状況下での問題意識の適合性、対象となる問題や課題の新鮮さ、豊かな将来性を予知させるもの、応用的・実用的価値が期待されるものであること等が現実的要求を満たしてくれる上から、これらを評価基準として、まさに主題3°,すなわち飛田武幸の仕事が現代最も資格を得た代表的主題であると筆者は固く信じてここにそのことを結論する。

本章を終えるに当たって強調しておきたいことは、飛田のイノベーション理論とは、敢えて哲学的に云うならば、“創造の秘密の段階的な論理的メカニズムの解明または理論構成上の指導原理の提示”に値し得る、普遍性の高い方法に他ならないということである。

2. イノベーション理論から新しい確率解析へ：飛田の仕事

前節の結果に基づいて、本論 (I) では飛田のイノベーション理論を中心に、彼の現代確率解析（ホワイトノイズ解析）が展開されていく過程の起こりまでをまず歴史的に展望する。

(1) P. Lévy と飛田武幸: イノベーション理論の誕生前から現代確率解析へ至るまでの歴史展望 P. Lévy (1886–1971) と飛田武幸(1927–)とは確率論研究をとおして、両者間には密接な交流があった。そのことは飛田が、19世紀末から20世紀前半にかけて活躍した Wiener, Kolmogorov, W. Feller, 伊藤 清などと同様に、近代確率論の形成と発展に大きく貢献した当時世界的な巨匠であった Lévy の最も深い影響下にあったと云えようか。飛田にとって彼とのアカデミックな年月は前世紀の後半に入ってからのものであり、その期間は決して長いものではなかったであろうが、そこから得た貴重な研究上の教訓は、名古屋およびプリンストンの両大学での充実した研究生活の中で、強固に培われて後に大輪と化す優れたアイディアとこれらの実現が約60年間を経た今日ますます衰えを見せないでいることは実に驚嘆すべきである(2011年7月の韓国および名古屋での研究集会の講演原稿 [12] 等)。

それでは標題における飛田の Lévy に関連する主要な部分を簡潔に見てみよう。

1°. イノベーション理論関係: この方面の近代的先駆者は Lévy である。彼の1937年の著書 [] の中では、この理論の三段階用語 Reduction→Synthesis→Analysis やこれらに相当し得る言葉はまだ用いられなかったが、この本に現れたアイディアは後の飛田によるものと本質的に同じものであることを彼は断言した。Lévy の明確なアイディアは上記の著書の第2版(1954年)に再現されたが、そこには離散的なパラメータの場合に対するイノベーションが議論されている。

その前年の論文 [24] は確率過程 $X(t)$ を決定するために、確率無限小（または変分）方程式とよばれる、つぎの形の方程式を与えた：

$$\delta X(t) = \Phi(X(\tau); \tau \leq t, Y, t, dt) \quad (*)$$

ここに $\delta X(t)$ は無限小時間区間 $[t, t+dt)$, $dt > 0$ 上の確率過程 $X(t)$ の変分である。式 (*) については本事項の終わりに触れておきたい。

続いて1955年から60年にかけてイノベーションの実現に関わる重要な成果が得られた。一つは Lévy による1956年の論文 [25] (55年の第3回パークリー・シンポジウムで行なった講演)、他は飛田による1960年の仕事 [10] である。これはガウス過程に対するイノベーションを意味し、両者はともに Lévy 自身によって提唱された言葉「標準表現」を用いているが、それぞれが独立に得た結果である。以下の (2) で再論されよう。

1950年代の末近く Wiener もイノベーション理論に大きな関心を寄せている(彼の著書 [7] 参照)。その他にも興味深い仕事(たとえば, T. Kailath, A. N. Shiryaev) がなされたが、上記に述べたもの等はガウス過程のイノベーションに関する特筆すべき成果であった。

1990年代以後、現在にかけて飛田と共同研究者たちは確率場のイノベーションとその確率解析の研究を精力的に進めている。たとえば, [13] (1998), [8] (2004), [9] (2008) 等をはじめ他

者の研究と合わせて諸問題が多彩に展開されている。

上記の確率無限小方程式 (*) に関する続きを述べよう。この方程式の重要性は、一般的な言葉では確率過程の方程式、正確にはイノベーション (新生確率過程) そのものを提示する方程式であるということである。ここでイノベーションとは具体的に何を指すのかを議論する前に、飛田にとって自身のイノベーションと Lévy の方程式との関係を考察する機会をもつこととなった一件に触れておこう。それは、1968年にパリに住む Lévy を訪ねた時のことであった。彼から二つの研究を薦められた一つは、確率場、特に Lévy のブラウン運動をもっと詳しく研究すべきであるということと、もう一つは方程式 (*) の意義を明らかにすることであった。飛田にとってはこれらはそれほど困難な問題ではなかったであろう ([6], [7] 参照)。ついでに述べれば、飛田と Lévy の最晩年の個人間の交流はもう一度、1969年10月14日付けの Lévy からの飛田宛の手書きの書簡 (彼の父に関する資料、自分に関する資料と1935年までの科学的作品の著者紹介への補足、家族に関すること等、三部から成る内容) であった。方程式 (*) に対する当初の問題の残りは以下の項目 (2) で最終的に明らかになるであろう。

最後に Lévy の人間の一端を示す飛田の言葉がある。彼は論文や研究書で数学 (または科学や哲学) に関して哲学的議論をしたことはなかった。そのことは、そのような議論をする必要があるとは思われなかったからであろう ([6] を参照)。要するに数学上の問題は数学として研究し解決すべきであるという信念の人であったと思われる。

2°. ホワイトノイズ解析関係: Lévy が飛田に大きく影響した仕事は、イノベーション理論のアイデアを提示したほぼ同年 (1937年) からおおそ晩年に至るまで、飛田が1968年に奨励されたことのある (上記) ブラウン運動のさらに進んだ研究であった。ブラウン運動の研究に関する Lévy の際立って顕著な業績を含む、飛田のそれまでのブラウン運動に関する総合的仕事は1975年の日本語版著書 (1980年英語版) にある。ここまでの研究は飛田にとって確率解析へのきわめて基本的な仕事であった。

それ以後は、確率解析の現今最も基礎的理論の一つとして中心的かつ広大な応用域への適用性など、その存在は、かつてなかったほどに優れた研究者たちを魅了しているホワイトノイズ解析にあると云っても過言でないであろう。飛田の場合は、たとえば1993年の [11] はこの分野の代表的仕事の一つであると考えられる。現在も本テーマにの研究に精力的に活動中の飛田はこの確率解析の最大のパイオニアの一人とみなされる。

Lévy のブラウン運動と飛田のそれに関する仕事に始まり、ホワイトノイズ解析に至る研究の歴史的話題は次回の本論 (II) で改めて報告の予定である。

(2) イノベーション理論再訪 2. (1) 1° で触れた確率無限小方程式 (*) についてその続き (意義、存在等) を説明してから、イノベーションについての先の入門的説明 (まえおきの2の (2)) をもう少し厳密かつ詳細に扱ってみよう。(T. Hida & Si Si [8], 飛田 [7], T. Hida & Si Si [9] 参照)。

1° 無限小方程式 (*) とイノベーション $X(t)$ はスカラーまたはベクトル値をとるとして、 $Y(t)$ が $X(t)$ のイノベーションである条件から始める。

定義 1. 下記の条件が満たされていれば、システム $\{Y(t)\}$ は確率過程 $\{X(t)\}$ のイノベーションである。

条件: 1. あらゆる瞬時に独立な値をもつ一般化された確率過程。 2. $Y(\xi) = (Y, \xi)$ は $B_{t+}(X)$ に

関して可測、ここで t は $\text{supp}(\xi)$ (ξ の台) の上限、かつ $B_{s-}(X)$ に独立であり、 s は $\text{supp}(\xi)$ の下限である。 3. 次式が成り立つ。

$$B_{t-}(X) \vee \left(\bigwedge_{\xi \in \text{supp } p(\xi)} B(Y(\xi)) \right) = \bigwedge_{\varepsilon > 0} B_{t+\varepsilon}(X).$$

$B(Y(t))$ は $Y(t)$ によって生成される (σ -加法族 B の) 最小の完全加法族である.

条件 1-3 が満たされるイノベーションが得られたとすれば, 遠く離れた過去でなく, $\bigwedge_t B_t(X)$ が存在して, 明らかに σ -加法族であれば, 方程式 (*) はつぎの方程式によって形式的に表される.

$$X(t) = \Psi(Y(s), s \leq t, t). \quad (1)$$

このとき, s, t はそれぞれ有理数によって置き換えられて各 σ -加法族の可測性が保証される.

イノベーションの初段階を終えると, 元の確率過程は素な独立確率変数 $Y(t)$ の関数として表されことが期待され, 元の事象を表す関数の新しい変数とされる. ここまでに至れば, 当初の確率過程を解析する段階に至ったことになるであろう. 方程式 (*) は通常の方程式と異なり, 問題となる確率過程を特徴づける公式であると理解すべきであり, 解を求めることだけが主要な目的ではない.

さて, 式 (1) から $Y(s)$ を形式的に得たとすれば, それが定義 1 の三つの条件を満たすかどうかを確認しなければならない. 閉積分路 C に依存する確率場 $X(C)$ に対する方程式 (*) の一般化が下記の形で提起され得るとする.

$$\delta X(C) = \Phi(X(C'), C' < C; Y(s), s \in C, C, \delta C), \quad (2)$$

ただし, $C' < C$ は, C' が C の内部にある, すなわち積分路 C' によって囲まれた領域 (C') が領域 (C) の部分集合であることを意味し, Φ は方程式 (*) の場合と同様に非確率関数で, 系

$$Y = \{Y(s), s \in C; C \in \mathcal{C}\}$$

は $X(C)$ のイノベーションである. このことを明確にするために, 定義 1 に代る新しい定義を与える..

まず方程式 (2) に対応する σ -加法族を定めておく. $B_C(X)$ を $C' < C$ である $X(C')$ すべてによって生成された σ -加法族とする. 同様に, $B_C(Y) = \bigwedge_{\sup p(\xi) \supset (C)} B(Y(\xi))$ と定める.

定義 2. $X(C)$ のイノベーションは下記の条件を満たす, $C \in \mathcal{C}$ を伴った系 $Y(C) = \{Y(s), s \in C\}$ の族である.

条件: 1. $Y(s)$ は R^d によってパラメータの付けられた一般化された確率過程かつあらゆる点 s において独立な値をもつ. 2. $\text{supp}(\xi) \cap (\bar{C}) = \emptyset$ であれば, $Y(\xi), \xi \in E$ は $B_C(X)$ に独立であり, また $\text{supp}(\xi) \subset (C)$ であれば, $Y(\xi)$ は $B_C(X)$ に関して可測である. 3. 次式が成り立つ.

$$B_{C-}(X) \vee \left(\bigwedge_{\sup p(\xi) \supset (C)} B(Y(\xi)) \right) = \bigwedge_{\delta n > 0} B_{C+\delta n}(X).$$

C の変形 δC は, つぎの系の右辺の意味において表される: $\delta C \equiv \{\delta n(s), s \in C\}$, $\delta n(s)$ は点 s における

C への法線ベクトルの長さを示す。

以上のどちらの場合に対しても、イノベーションが存在すれば、それによって生成される σ -加法族は一つしかない(自明性), ということが証明できる(略)。またイノベーションが実際に存在するように元の変数の σ -加法族を特定化しなければならないことも正確な説明や理解のために必要なことである。

2° 変分方程式(*)とイノベーション 予定された頁数も殆ど尽きようとしていたので標題の件についてざっと概観するにとどめる。実際にイノベーションに関する話題は、Lévy 以来、飛田を中心に精力的に開発されてきた研究成果に基づいて基礎から応用にわたって広汎であり、その中心的話題を定めることも決して容易でない。よって標題は応用面への橋渡しも意図した筆者の思いから選んだ話題である。確率過程や確率場の研究にとってイノベーションの手法は重要である。そのための基礎的出発点の一つとしての方程式(*)の変分法的側面的一端を紹介するが、特に関数解析の方法の果す役割は大きく、それは、ホワイトノイズ超汎関数(次回(II)の主題の一つ)を導入する場合の方法の一つ(Sobolev 空間の構造の使用)から生じる関数空間を二、三用いるが、ここでの叙述は簡潔にして、目的の方程式を導く。ここで方程式(*)の呼称を、無限小方程式とする場合はイノベーションを中心とする議論を、変分方程式とする場合は元の変数の変分の積分形式表現による広く確率解析の議論の展開を、それぞれが主目的とするときと、その妥当性はともかくとして、一応の区別をしておくことにする。よってここでは原方程式(*)を確率変分方程式とよぶことにする。まえおきが長くなったが本論にもどろう。

$X(C)$ を S^* 上の $(L^2)^{-}$ における確率場とし、 $C = \{\text{卵形面 } C; C \in C^\infty\}$ によって定義された集合 C を、 $(d-1)$ 次元多様体 C の動く族とする。 C の無限小変形は先と同様に δC によって与えられる。そのときの $X(C)$ の無限小変形を変分 $\delta X(C)$ によって示す。その結果、云わば確率変分方程式を定めることができるが、それは確率微分方程式よりも複雑であるから、それを避けるためにずっと限られた議論とする。そのために提案されたいくつかの興味深い例があるが([9], p.213-214), 省略して結論的に対象とするものは、今後つぎの Volterra 形式によって表される場合の方程式である:

$$\delta X(C) = \int_{C \in C} X'(C, s) \delta n(s) ds, \quad (3)$$

$X'(C, s)$ は (C, s) ($C \in C, s \in C$) に依存する確率場である。

ここで $X'(C, s)$ は任意の対 (C, s) に対して $(S)^*$ 内にあると仮定する。またホワイトノイズ汎関数(超汎関数かもしれない) $\varphi(x), x \in E^* \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ の S -変換を思い出してみよう。いま関わっているものは、多次元パラメータのホワイトノイズであり、 S -変換は $d=1$ の場合と同じ表現をもつ。

$$S: \varphi(x) \mapsto (S\varphi)(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right] \int_E \exp[(x, \xi)] p(x) d\mu(x).$$

S -変換を Volterra 形式(3)の $\delta X(C)$ へ適用すれば、

$$\delta U(C) = \int U'(C, s) \delta n(s) ds, \quad (4)$$

C は $s \in I = [0, 1]$ によってパラメータ化され、 $U(C) = S(X(C))$ 。

C が関数 $\xi(s), s \in S^1$ によって表されるとすれば、 $U(C) = U(\xi)$ とすることによって(4)から下記の変分形式: 変分方程式の Volterra 形式

$$\delta U(\xi) = \int f(\xi, U, s) \delta n(s) ds, \quad (**)$$

を得る. この後は (**) の形式で表されるような汎関数の変分解析へ一般化される. Lévy はこの形式を提案し解 $U(\xi)$ の存在と一意性を証明した ([9]). 解を得て後の問題は, S -変換によるあるホワイトノイズ汎関数の像であるかどうかを検証しなければならない. この目的のためにはいろいろな判定法が有用視されている.

以上で本論 (I) を終える. 他に触れるべきことも多々あろうが, 本論の核心をなす飛田理論の学理とその創造の歩みの途中までの展望を最小限述べたつもりである. しかしなが入念な記述に徹し得なかった部分があるとすれば寛容を乞う次第である. 下記において, 飛田理論的方法的に中心的役割を担う関数解析, およびイノベーション理論の発展的話題 (弱義のイノベーション) について注意しておくにとどめる.

注意 1 イノベーション関係の延長線上にある概念としての弱義のイノベーションについて触れておく. 方程式 (*) において, 元の確率変数 $X(t)$ からこのイノベーション $Y(t)$ を求める, すなわち reduction

から synthesis の段階を通してどのような条件の下でイノベーションが得られるかという問題への一般的解答は見出せない. Gauss 過程の場合は標準表現の存在がこの問題に答えてくれるが, その他の場合は, 個々の問題として処理されるか, またはつぎに述べる弱義の方法にしたがう場合がある. 結論を急ごう.

まず標準表現の存在を保証する定理を見出すこと, つぎにこの定理の系として Gauss 過程の系列を積分形式で表すとき, この表現が標準表現であるための十分条件を得ておく. その十分条件とは,

$B_t(X) = B_t(Z)$ が各 t で成り立つというものである. ここで, $X(t) = \int F(t, u) dZ(u)$, $Z(t)$: Gauss 系

変数. Gauss 系全体は可分なヒルベルト空間 $L^2(\Omega, P)$ の部分空間を張り, その空間を $m(X)$ で表す. この

とき, $m(X)$ はすべて点スペクトルをもつ, 射影による巡回部分空間の可算個の直和, およびすべて連続

スペクトルをもつ同様の可算個の直和をそれぞれ $m(X)$ の部分空間とする直和に分解される.

(Hellinger-Hahn の定理の適用). ここですべて点スペクトルをもつ巡回部分空間の可算個の直和からなる空間 $m(D)$ が点スペクトルをもたないとすれば, $m(D) = \{0\}$. これは Gauss 系の場合であり, それを仮定しなければ, すなわちイノベーションの構成が容易でなかったり, それに準じたものを考える場合は, 先の十分条件に代って, 各 t ごとに $m_t(X) = m_t(Z)$ (整数全体の集合) である弱い条件で置き換える. これが弱義のイノベーションを得ることができる基本的操作である. 以上は Lévy のアイディア [24] の飛田による説明, たとえば [7] に基づく. より専門的には [8] を参照せよ.

注意 2 ここでの議論は精密に行えば, 本文でも触れたように, 極度に関数解析の高度の知識が要求される. その意味でも上記の注意 2 もその例にもれない. Sobolev 空間, 超汎関数とそれらがなす Hilbert 空間, これらの直和である Hilbert 空間とその双対空間, 関数空間の三つ組みの包含関係等々については次回(II)で詳述の予定である.

謝辞 数理研での 2000 年以降の数学史の研究集会における飛田先生と Si Si 博士の最近の確率論に関する研究に深い関心を寄せてきた筆者は, 飛田先生のご好意に甘えて名古屋での国際会議やシンポジウムにその都度お招きを戴いてこの方面の進歩に驚きを禁じ得なかった. 今日, 科学の非決定論的世界の広大な領域の要としての確率論の絶対的存在を学理的かつ歴史的に認識しておく必要を痛感して, 自分の力量も顧みずここに本テーマへの挑戦を敢て試みた次第である. 世界的な碩学を近くに頂く幸運とこの世界

への先生の至高のご見識を日頃拝受する者として心から深く感謝申し上げたい。また、本論（I）へ種々有益なご注意、ご助言そしてご批評を賜った方々へここに厚くお礼を申し上げる。

参 考 文 献

- [1] 阿部剛久, 哲学から数理の世界へ—自然科学に現れた「決定論」とその現代的課題をめぐって—, 数理解析研究所講究録「数学史の研究」, 京都大学数理解析研究所, No. 1257, 128—141(2002).
- [2] 阿部・佐久間, 統計学入門—多変量解析の実際まで—大竹出版, 1992.
- [3] R. Brown, On the Particles Contained in the Pollen of Plants: and the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies, *Philosophical Magazine, Ann. Philos., New Series*, 4, 161 - 178.(1828).
- [4] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley & Sons, 1952.
- [5] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik*, 17, 549 - 560(1905).
- [6] T. Hida, 第5回 P. Lévy セミナーに向けて, T. Hida(Organizer), The 5th Nagoya Lévy Seminar, Dec. 15 - 17, Part I, 1 - 11(2006).
- [7] 飛田武幸, 確率論の基礎と発展, 共立出版, 2011.
- [8] T. Hida, Si Si, *An innovation approach to random fields. Applications of white noise theory*, World Scientific, 2004.
- [9] T. Hida, Si Si, *Lectures on white noise theory*, World Scientific, 2008.
- [10] T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes, their applications, *Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto(SA. Math.)*, 34, 109 - 155(1960).
- [11] T. Hida, H. H. Kuo, J. Pottorf, L. Streit, *White noise: An infinite dimensional calculus*, Kluwer Academic, 1993.
- [12] 飛田武幸, Revisiting the dawning of white noise analysis, *AMS Subject Classification 60H40 White Noise Theory*, 韓国および名古屋での講演, 講演原稿 pp. 19, July, 2011.
- [13] T. Hida, Si Si, *Innovation for random fields, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 1, 499 - 509(1998).
- [14] T. Hida, *White noise analysis: A new frontier*, Volterra Center, Publ., No. 499, January 2002.
- [15] 伊藤 清, 確率論の基礎, 現代数学叢書, 岩波書店, 1944 (第1刷) — 1959 (第5刷) .
- [16] 伊藤 清, 確率論, 岩波書店, 2007.
- [17] 伊藤 清, Markoff 過程ヲ定メル微分方程式, 全国紙上数学談話会 244(1942).
- [18] 池田信行, 確率解析の生い立ちと成長, 日本数学会 50 周年記念企画「数学の流れと展望」第 49 巻第 3 号, 272 - 291. (1997).
- [19] A. N. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, 104, 415 - 4458 (1931).
- [20] 小谷眞一, 測度と確率 I, II, 岩波書店, 1997.
- [21] 久保, 阿部, 都築, 統計学要論, 共立出版, 1990 (初版第 1 刷) — 2005 (増補版第 6 刷) .
- [22] M. Kac, *Enigmas of chance: An autobiography*, Harper & Row, 1974.
- [23] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier—Villars, 1937, 2^{ème} ed., 1954.
- [24] P. Lévy, *Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions*. Univ. of Calif. Pub. In Statistics, I, 331—388(1953).
- [25] P. Lévy, A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions, *Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II*, Univ. of Calif. Press, 133—175(1956).
- [26] J. Perrin, *Atomes*, Ox Bow Press, 1990(原著 *Les Atomes*, 1913 の英語版).
- [27] 重川一郎, 確率解析, 岩波講座 現代数学の展開 9, 岩波書店, 1998.
- [28] 谷口説男 (訳), 確率微分方程式—入門から応用まで—, (原著: B. エクセンダー, *Stochastic Differential Equations—An Introduction with Applications—*, Springer, 1998), シュプリンガー東京, 2002.
- [29] N. Wiener, *Differential Space*, *J. Math. Phys.*, 2, 131—174(1923).
- [30] N. Wiener, *I am a mathematician*, M. I. T. Press, 1964.